ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 148 (2018). С. 130–135

УДК 514.763.81

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ УРАВНЕНИЙ АБЕЛЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ УПРАВЛЯЮЩЕГО ПАРАМЕТРА

© 2018 г. **В. В. ШУРЫГИН (мл.)**

Аннотация. В работе найдены необходимые и достаточные условия, при которых два уравнения Абеля с коэффициентами, зависящими от управляющего параметра, локально эквивалентны относительно одной псевдогруппы преобразований обратной связи. Эти условия сформулированы в терминах дифференциальных инвариантов.

Ключевые слова: уравнения Абеля, дифференциальные инварианты, преобразования обратной связи, управляющий параметр.

AMS Subject Classification: 53A55, 34C14

1. Введение. Проблема эквивалентности некоторых дифференциальных уравнений или систем уравнений относительно преобразований обратной связи рассматривалась в ряде работ. Существует несколько подходов к ее решению. В настоящей работе мы применяем подход, основанный на геометрии пространств джетов и теории дифференциальных инвариантов псевдогрупп Ли, ранее использованной в работах В. В. Лычагина [8, 9], А. Г. Кушнера и В. В. Лычагина [3], П. В. Бибикова [1], Д. С. Гриценко и О. М. Кирюхина [6].

Напомним, что уравнение Абеля — это дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' = a(x)y^3 + b(x)y^2 + c(x)y + d(x).$$

Легко видеть, что псевдогруппа точечных преобразований вида

$$x \mapsto f(x), \quad y \mapsto g(x)\cdot y + h(x), \quad f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}),$$

сохраняет класс таких уравнений (и, вообще, уравнений вида $y' = P(x, y)$, где P — многочлен от y). Проблема эквивалентности уравнений Абеля относительно действия этой псевдогруппы рассматривалась в ряде работ. Например, в работе П. Аппеля [5] были найдены инварианты этого действия.

В настоящей работе мы рассматриваем вопрос о локальной эквивалентности уравнений Абеля первого порядка

$$y' = a(x, u)y^3 + b(x, u)y^2 + c(x, u)y + d(x, u), \tag{1}$$

коэффициенты которых зависят от одномерного управляющего параметра u, относительно действия псевдогруппы G преобразований вида

$$x \mapsto f(x), \quad u \mapsto w(x, u), \quad y \mapsto g(x)\cdot y + h(x).$$

Здесь функции f, g, h, w предполагаются бесконечно дифференцируемыми. Также будем предполагать, что коэффициент $a(x, u)$ зависит от u, т.е. что производная a_u не равна нулю тождественно. Преобразования уравнений Абеля (1), определяемые действием псевдогруппы G, будем называть *преобразованиями обратной связи*.

Действие псевдогруппы G продолжается до действия на пространстве джетов расслоения $\pi : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$, где $\pi : (x, u, a, b, c, d) \mapsto (x, u)$. Каждое уравнение Абеля $\mathcal{E}$ можно рассматривать как сечение такого расслоения. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ псевдогруппы G состоит из векторных полей вида

$$X = \xi(x)\frac{\partial}{\partial x} + \omega(x,u)\frac{\partial}{\partial u} + \big(\eta(x)\cdot y + \zeta(x)\big)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебре Ли векторных полей на расслоении π имеет вид

$$\widehat{X} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \omega\frac{\partial}{\partial u} - \big(2\eta + \xi'\big)a\frac{\partial}{\partial a} - \big(\xi' b + 3\zeta a + \eta b\big)\frac{\partial}{\partial b} + \\ + \big(\eta' - \xi' c - 2\zeta b\big)\frac{\partial}{\partial c} + \big(\zeta' - \zeta c + \eta d - \xi' d\big)\frac{\partial}{\partial d}.$$

Здесь и далее штрих обозначает производную функций ξ, η, ζ по x.

Пусть $J^k(\pi)$ — пространство k-джетов сечений расслоения π. Канонические координаты на этом пространстве будем обозначать $(x, u, a, b, c, d, a_x, a_u, b_x, b_u, \dots)$. Действие псевдогруппы G на пространстве 0-джетов $J^0(\pi)$ поднимается до действия на всех пространствах $J^k(\pi)$.

Определение 1. *Дифференциальным инвариантом* порядка $\leqslant k$ будем называть функцию $I \in C^\infty(J^k\pi)$, рациональную относительно аргументов a_x, a_u, …, a_{xx}, a_{xu}, a_{uu}, … и постоянную вдоль орбит действия продолженной псевдогруппы G.

Дифференциальные инварианты удовлетворяют равенству

$$\widehat{X}^{(k)}(I) = 0$$

для всех $X \in \mathfrak{g}$. Здесь $\widehat{X}^{(k)}$ обозначает k-е продолжение поля $\widehat{X}$ на $J^k(\pi)$. Множество всех дифференциальных инвариантов образует алгебру.

Будем обозначать символами d/dx, d/du операторы полной производной по соответствующей переменной (см. [2]).

Определение 2. *Инвариантным дифференцированием* будем называть комбинацию полных производных

$$\nabla = A\frac{d}{dx} + B\frac{d}{du}, \quad A, B \in C^\infty(J^\infty(\pi)),$$

инвариантную по отношению к действию продолженной псевдогруппы G, т.е. удовлетворяющую равенству

$$[\nabla, \widehat{X}] = 0$$

для всех $X \in \mathfrak{g}$.

Для любого дифференциального инварианта I функция $\nabla(I)$ также является дифференциальным инвариантом. Это обстоятельство позволяет получать новые инварианты из уже имеющихся путем применения инвариантных дифференцирований. Коэффициенты A, B удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений (см. [9]):

$$\widehat{X}(A) - \xi' A = 0, \quad \widehat{X}(B) - \frac{\partial w}{\partial x}A - \frac{\partial w}{\partial u}B = 0. \tag{2}$$

Вычисления дифференциальных инвариантов и инвариантных дифференцирований выполнены в системе компьютерной алгебры `Maple` с использованием пакетов `DifferentialGeometry` и `JetCalculus` (автор Я. Андерсон).

2. Регулярный случай. Заметим, что множество $\{ab_u - ba_u = 0\}$ является сингулярной орбитой действия G на $J^1(\pi)$. Назовем точку $x \in J^k(\pi)$ *регулярной*, если в этой точке $ab_u - ba_u \neq 0$. В этом разделе рассмотрим орбиты регулярных точек.

Теорема 1. *Алгебра дифференциальных инвариантов действия псевдогруппы G в окрестности регулярной орбиты порождена двумя инвариантами первого порядка*

$$I_1 = \frac{a^2(3a_u c_u - b_u^2)}{(ab_u - ba_u)^2}, \quad I_2 = \frac{(2b_u^3 - 9a_u b_u c_u + 27a_u^2 d_u)a^3}{(ab_u - ba_u)^3},$$

двумя инвариантами второго порядка

$$J_1 = \frac{a^2(a_u b_{uu} - b_u a_{uu})}{a_u^2(ab_u - ba_u)^2}, \quad J_2 = \frac{a_u M_2}{(ab_u - ba_u)^4},$$

где

$$M_2 = a^2\bigl(9ab_x - 9ba_x + 27a^2d - 9abc + 2b^3\bigr)\bigl(a_u b_{uu} - b_u a_{uu}\bigr) + 9a^2\bigl(b_u a - a_u b\bigr)\bigl(b_u a_{xu} - a_u b_{xu}\bigr) - \\ - a_u\bigl(b_u a - a_u b\bigr)\bigl(-9a^2cb_u + 27a^2da_u + 3ab^2b_u - b^3a_u\bigr),$$

и двумя инвариантными дифференцированиями

$$\nabla_1 = \frac{9aa_u^2}{(ab_u - ba_u)^2}\frac{d}{dx} - \frac{aa_u^2(9ab_x - 9ba_x + 27a^2d - 9abc + 2b^3)}{(ab_u - ba_u)^3}\frac{d}{du}, \quad \nabla_2 = \frac{a}{a_u}\frac{d}{du}.$$

Эта алгебра разделяет регулярные орбиты.

Доказательство. Из формулы для продолжения векторного поля (см., например, [2,4]), следует, что k-е продолжение поля $\widehat{X}$ зависит от джетов порядка $(k+1)$ функций $\xi(x)$, $\eta(x)$, $\zeta(x)$ и от джетов порядка k функции $\omega(x,u)$. Обозначим символами Ξ_i^k, H_i^k, Z_i^k, Ω_{ij}^k компоненты разложения

$$\widehat{X}^{(k)} = \sum_{i=0}^{k+1}\left(\xi^{(i)}(x)\Xi_i^k + \eta^{(i)}(x)H_i^k + \zeta^{(i)}(x)Z_i^k\right) + \sum_{i+j=0}^{k}\frac{\partial^{i+j}\omega(x,u)}{\partial x^i \partial u^j}\Omega_{ij}^k.$$

Векторные поля Ξ_i^k, H_i^k, Z_i^k, $i = 0,\dots,k+1$, и Ω_{ij}^k, $0 \leqslant i+j \leqslant k$, порождают вполне интегрируемое распределение на пространстве $J^k(\pi)$. Интегральные подмногообразия этого распределения являются орбитами действия группы G.

Заметим, что $\dim J^k(\pi) = 2k^2 + 6k + 6$. Обозначим символом $\mathcal{O}_k$ орбиту действия группы G в пространстве $J^k(\pi)$. Проекция

$$\mathcal{O}_{k-1} = \pi_{k,k-1}(\mathcal{O}_k) \subset J^{k-1}(\pi)$$

является орбитой в $J^{k-1}(\pi)$. Рассмотрим такую точку $z_{k-1} \in J^{k-1}(\pi)$, что $\widehat{X}^{(k-1)} = 0$ в этой точке. Тогда поле $\widehat{X}^{(k)}$ является вертикальным относительно проекции $\pi_{k,k-1}$ над этой точкой. Старшие производные, от которых зависят компоненты этого поля $\widehat{X}^{(k)}$, — это $\xi^{(k+1)}$, $\eta^{(k+1)}$, $\zeta^{(k+1)}$ и $\partial^{i+j}\omega/\partial x^i \partial u^j$, где $i+j=k$. Отсюда следует, что слои расслоения $\pi_{k,k-1} : \mathcal{O}_k \to \mathcal{O}_{k-1}$ имеют размерность $k+4$ при $k \geqslant 2$.

Орбиты в пространстве 1-джетов находятся интегрированием 12-мерного вполне интегрируемого распределения, натянутого на поля Ξ_i^k, H_i^k, Z_i^k, $i = 0,1,2$, и Ω_{ij}^k, $0 \leqslant i+j \leqslant 1$. Поэтому первые инварианты появляются в пространстве $J^1(\pi)$, и их должно быть два: это I_1 и I_2. Кроме того, это означает, что

$$\dim \mathcal{O}_k = 12 + \sum_{i=2}^{k}(i+4) = \frac{1}{2}(k^2 + 9k) + 7.$$

В [7] доказано, что размерность алгебры дифференциальных инвариантов порядка не более k равна коразмерности орбиты общего положения (регулярной орбиты). Это означает, что при $k \geqslant 2$ имеется $\frac{1}{2}(3k^2+3k-2)$ независимых инвариантов порядка не выше k (из них $3k$ инвариантов порядка ровно k).

Решая систему (2), находим два дифференцирования ∇_1 и ∇_2. Инварианты второго порядка $\nabla_i I_k$, $i,k = 1,2$, независимы, следовательно, в пространстве $J^2(\pi)$ есть еще два инварианта: это J_1 и J_2.

Отметим, что все полученные 6 инвариантов второго порядка линейны по вторым производным, а компоненты дифференцирований ∇_1, ∇_2 зависят только от координат в $J^1(\pi)$. Это означает, что все инварианты, получаемые дифференцированиями из уже найденных, будут линейны по старшим производным. В пространстве 3-джетов имеется 9 инвариантов порядка 3. Применяя дифференцирования ∇_1 и ∇_2 к шести инвариантам порядка 2, получим 12 инвариантов порядка 3. Следовательно, между этими инвариантами существует 3 сизигии.

Чтобы получить все инварианты порядка k, достаточно применить дифференцирования ∇_1 и ∇_2 ко всем уже найденным инвариантам порядка $k-1$. Тот факт, что алгебра дифференциальных инвариантов разделяет регулярные орбиты, также следует из [7]. □

Замечание 1. Инвариантные дифференцирования удовлетворяют коммутационному соотношению

$$\bigl[\nabla_1, \nabla_2\bigr] = (2J_1 - 1)\nabla_1 + \bigl(9J_2 + I_2 + 3I_1 + 1\bigr)\nabla_2. \tag{3}$$

Две из трех сизигий среди инвариантов порядка 3 получаются из формулы (3). Третья имеет вид

$$9\nabla_2(J_2) - \nabla_1(J_1) + 9J_2(3J_1 - 2) + J_1(I_2 + 3I_1 + 1) - I_2 + 2 = 0.$$

Рассмотрим пространства $\mathbb{R}^2$ с координатами (x, u) и $\mathbb{R}^{17}$ с координатами

$$\Bigl(i_1,\ i_2,\ j_1,\ j_2,\ i_{11},\ i_{12},\ i_{21},\ i_{22},\ i_{111},\ i_{121},\ i_{122},\ i_{211},\ i_{221},\ i_{222},\ j_{11},\ j_{12},\ j_{21}\Bigr).$$

Каждое уравнение Абеля $\mathcal{E}$ определяет отображение $\sigma_{\mathcal{E}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{17}$ по формулам

$$i_k = I_k^{\mathcal{E}}, \quad j_k = J_k^{\mathcal{E}}, \quad i_{k\ell} = \nabla_\ell I_k^{\mathcal{E}}, \quad j_{k\ell} = \nabla_\ell J_k^{\mathcal{E}}, \quad i_{k\ell m} = \nabla_\ell \nabla_m I_k^{\mathcal{E}},$$

где верхний индекс $\mathcal{E}$ означает, что дифференциальные инварианты вычисляются для коэффициентов уравнения $\mathcal{E}$. Образ $\Sigma_{\mathcal{E}} = \operatorname{im} \sigma_{\mathcal{E}} \subset \mathbb{R}^{17}$ зависит только от класса эквивалентности уравнения $\mathcal{E}$ относительно действия G.

Определение 3. Будем говорить, что уравнение $\mathcal{E}$ *регулярно* в области $D \subset \mathbb{R}^2$, если

1) 3-джеты коэффициентов уравнения $\mathcal{E}$ принадлежат регулярным орбитам;
2) $\sigma_{\mathcal{E}}(D)$ — гладкое двумерное подмногообразие в $\mathbb{R}^2$;
3) какие-либо две из функций i_1, i_2, j_1, j_2, i_{11}, i_{12}, i_{21}, i_{22} могут быть выбраны в качестве локальных координат наЁ$\Sigma_{\mathcal{E}}$.

Теорема 2. *Два регулярных уравнения Абеля $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ эквивалентны относительно действия псевдогруппы G тогда и только тогда, когда $\Sigma_{\mathcal{E}} = \Sigma_{\mathcal{E}'}$.*

Доказательство. Ясно, что если уравнения эквивалентны, то $\Sigma_{\mathcal{E}} = \Sigma_{\mathcal{E}'}$.

Наоборот, пусть $\Sigma_{\mathcal{E}} = \Sigma_{\mathcal{E}'}$. Пусть, например, функции i_1 и i_2 задают координаты на $\Sigma_{\mathcal{E}}$. Заметим, что

$$\nabla_i = C_{i1} \frac{d}{dI_1} + C_{i2} \frac{d}{dI_2},$$

где d/dI_1, d/dI_2 — производные Трессе по инвариантам I_k (см. [7, 8]), а C_{ij}, $i, j = 1, 2,$ — инварианты 2 порядка. Условие совпадения многообразий $\Sigma_{\mathcal{E}}$ означает, что ограничения инвариантов вплоть до 3 порядка на это многообразие совпадают. Все производные этих инвариантов по i_1, i_2 определяют ограничения инвариантов всех порядков. Это означает, что совпадают также ограничения на $\Sigma_{\mathcal{E}}$ всех дифференциальных инвариантов. Поскольку алгебра инвариантов разделяет регулярные орбиты, отсюда следует, что уравнения $\mathcal{E}$ и $\overline{\mathcal{E}}$ эквивалентны. □

3. Сингулярные случаи. Рассмотрим уравнения (1), для которых $ab_u - ba_u = 0$. Легко видеть, что это равенство равносильно условию

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b}{a}\right) = 0,$$

т.е., $b(x, u) = k(x) \cdot a(x, u)$. Таким образом, сингулярная орбита состоит из уравнений вида

$$y' = a(x, u) y^2 (y + k(x)) + c(x, u) y + d(x, u). \tag{4}$$

В ней, в свою очередь уравнением $k^2 a_u - 3c_u = 0$ выделяется еще одна сингулярная орбита.

Будем говорить, что уравнения (4), для которых $k^2 a_u - 3c_u \neq 0$, образуют первую сингулярную орбиту.

Теорема 3. *Алгебра дифференциальных инвариантов действия псевдогруппы G в окрестности первой сингулярной орбиты порождена двумя инвариантами первого порядка*

$$K_1 = \frac{a_u\big(2k^3a_u - 9kc_u + 27d_u\big)^2}{\big(k^2a_u - 3c_u\big)^3}, \quad K_2 = \frac{a_u^3\big(2ak^3 + 9k_x + 27d - 9kc\big)^2}{a^2\big(k^2a_u - 3c_u\big)^3}.$$

и двумя инвариантными дифференцированиями

$$\nabla_1' = \frac{a_uc_{uu} - a_{uu}c_u}{a_u\big(k^2a_u - 3c_u\big)^2}\frac{d}{dx} + \frac{9c_ua_{xu} - 9a_uc_{xu} + 2ka_u^2\big(k^3a - 3kc + 3k_x\big) + 6a_uc_u\big(3c - k^2a\big)}{9a_u\big(k^2a_u - 3c_u\big)^2}\frac{d}{du},$$

$$\nabla_2' = \frac{a}{a_u}\frac{d}{du}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Всего при каждом $k \geqslant 1$ имеется $k^2 + k$ независимых инвариантов порядка не выше k, из них $2k$ инвариантов порядка ровно k.

Теорема эквивалентности таких уравнений формулируется аналогично теореме 2, только отображение

$$\sigma_{\mathcal{E}} : \mathbb{R}^2(x, u) \to \mathbb{R}^6\Big(k_1, k_2, k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}\Big)$$

строится по формулам

$$k_i = K_i^{\mathcal{E}}, \quad k_{j\ell} = \nabla_\ell' K_j^{\mathcal{E}}.$$

Замечание 2. Инвариант второго порядка, выражающийся простой формулой

$$J = \frac{a\big(a_uc_{uu} - a_{uu}c_u\big)}{a_u^2\big(k^2a_u - 3c_u\big)},$$

удовлетворяет равенству

$$\nabla_2' K_2 - 9K_2J + 2K_2 - 2\sqrt{|K_1K_2|} = 0.$$

Равенство $k^2a_u - 3c_u = 0$ означает, что

$$\frac{\partial}{\partial u}(3c - k^2a) = 0, \quad \text{т.е.} \quad c(x, u) = \frac{1}{3}k^2(x) \cdot a(x, u) + \ell(x).$$

Этим условием выделяется вторая сингулярная орбита. Она состоит из уравнений вида

$$y' = a(x, u)y\Big(y^2 + k(x)y + \frac{1}{3}k^2(x)\Big) + \ell(x)y + d(x, u),$$

для которых $k^3a_u - 27d_u \neq 0$.

Теорема 4. *Алгебра дифференциальных инвариантов действия псевдогруппы G в окрестности второй сингулярной орбиты порождена одним инвариантом первого порядка*

$$M = \frac{\big(k_x + 3d - k\ell\big)a_u - 3ad_u}{a\big(k^3a_u - 27d_u\big)}$$

и двумя инвариантными дифференцированиями

$$\nabla_1'' = \frac{a_ud_{uu} - d_ua_{uu}}{a_u^{4/3}\big(k^3a_u - 27d_u\big)^{5/3}}\frac{d}{dx} + \frac{k^2a_u^2\big(k_x - k\ell\big) + 27\ell a_ud_u + 9d_ua_{xu} - 9a_ud_{xu}}{9a_u^{4/3}\big(k^3a_u - 27d_u\big)^{5/3}}\frac{d}{du},$$

$$\nabla_2'' = \frac{a}{a_u}\frac{d}{du}.$$

При каждом $k \geqslant 1$ имеется $\frac{1}{2}(k^2 + k)$ независимых инвариантов порядка не выше k, из них k инвариантов порядка ровно k. Отображение

$$\sigma_{\mathcal{E}} : \mathbb{R}^2(x, u) \to \mathbb{R}^3(m, m_1, m_2)$$

в теореме эквивалентности строится по формулам

$$m = M^{\mathcal{E}}, \quad m_\ell = \nabla_\ell'' M^{\mathcal{E}}.$$

Наконец, условие $k^3 a_u - 27 d_u = 0$ равносильно тому, что

$$d(x,u) = \frac{1}{27} k(x)^3 \cdot a(x,u) + m(x).$$

Уравнения вида

$$y' = a(x,u)\left(y + \frac{1}{3}k(x)\right)^3 + \ell(x)y + m(x)$$

образуют третью сингулярную орбиту. На ней нет ни одного инварианта, все уравнения эквивалентны друг другу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бибиков П. В.*, Классификация управляемых ансамблей проективных точек// Изв. вузов. Сер. мат. — 2015. — *3*. — С. 28–34.
2. *Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1986.
3. *Кушнер А. Г., Лычагин В. В.* Инварианты Петрова гамильтоновых систем с управляющим параметром// Автомат. телемех. — 2013. — *3*. — С. 83–102.
4. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальныи уравнениям. — М.: Мир, 1989.
5. *Appell P.* Sur les invariants de quelques équations différentielles// J. Math. — 1889. — *5*. — C. 361–423.
6. *Gritsenko D. S., Kiriukhin O. M.* Differential invariants of feedback transformations for quasi-harmonic oscillation equations// J. Geom. Phys. — 2017. — *113*. — C. 65–72.
7. *Kruglikov B. S., Lychagin V. V.*, Global Lie–Tresse theorem/ Preprint `arXiv:1111.5480v1[math.DG]`. — Cornell Univ. Library, 2011.
8. *Lychagin V.* Feedback equivalence of 1-dimensional control systems of the first order// В сб.: «Geometry, Topology, and Their Applications»/ Proc. Inst. Math. NAS Ukraine, — 2009. — *6*, № 2. — C. 288–302.
9. *Lychagin V.* Feedback differential invariants// Acta Appl. Math. — 2010. — *109*, №. 1. — C. 211–222.

В. В. Шурыгин (мл.)
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: `vshjr@yandex.ru, 1vshuryg@kpfu.ru`